الجبر الخطي والهندسة الحليلية

المستوى الثاني تقانة

المحاضرة السابعة

طرق حل المعادلات الخطية

حل جملة المعادلات الخطية

طريقة كرامر

طريقة مقلوب مصفوفة

طريقة غاوص (طريقة حذف المجاهيل)

الجملة المتجانسة

1 . طريقة كرامر:

وتستخدم فقط عندما يكون عدد المعادلات يساوي عدد المجاهيل أي أن المصفوفة A مربعة. ويكون للجملة (1) حل وحيد إذا كان $\Delta = \det A \neq 0$.

و يعطى الحل بالقانون: $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$

حيث Δ محدد مصفوفة المعاملات و Δ_i هو المحدد الناتج عن المحدد Δ بتبديل العمود i العمود الحر.

وإذا كان $\Delta = 0$ فإننا نميز الحالتين:

أ- احد المحددات Δ_i على الاقل غير معدوم، فإن الجملة (1) مستحيلة الحل.

ب- جميع المحددات Δ_i معدومه، فإن للجملة (1) عدد غير منتهٍ من الحلول.

2 . طريقة مقلوب مصفوفة:

وتستخدم فقط عندما يكون عدد المعادلات يساوي عدد المجاهيل أي أن المصفوفة A مربعة. ويكون للجملة (1) حل وحيد إذا كان $\det A \neq 0$.

و يعطى الحل بالقانون: $X = A^{-1} \cdot B$.

وذلك بضرب طرفي المساواة بمقلوب A من اليسار (وهو موجود لان $\det A \neq 0$).

مثال 4: أوجد الحل بطريقة كرامر ثم تأكد من صحة الناتج بالاعتماد على طريقة مقلوب مصفوفة لجملة المعادلات:

$$\begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ 5x + 3y - 6z &= -1 \\ -x - 2y + 3z &= 2 \end{aligned}$$

طريقة كرامر:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 18 - 6 - 24 + 15 = 3 \neq 0$$

إذن للجملة حل وحيد.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -6 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{matrix} = 9+12-12-3=6 \Rightarrow x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & -6 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{matrix} = -6+6+24-15=9 \Rightarrow y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{9}{3} = 3$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{matrix} = 12-1-10+3-4+10=10 \Rightarrow z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{10}{3}$$

إذن فالحل هو $S = \left\{ \left(2, 3, \frac{10}{3} \right) \right\}$.

لاحظ ان المعادلات الثلاث تمثل ثلاث مستويات في الفضاء، وبما ان للجملة حل وحيد فهو نقطة تقاطع هذه المستويات $(2, 3, \frac{10}{3})$.

الحل بطريقة مقلوب مصفوفة:

إن الجملة السابقة تكتب بالشكل:

$$AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

إذا رمزنا لمصفوفة المعاملات لـ A فعندئذٍ يمكن إيجاد مقلوبها:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 4 \\ -\frac{7}{3} & \frac{5}{3} & \frac{11}{3} \end{bmatrix}$$

عندئذٍ الحل هو:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 4 \\ -\frac{7}{3} & \frac{5}{3} & \frac{11}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 10 \end{bmatrix}$$

بالمطابقة نجد أن: $x = 2 \, , \, y = 3 \, , \, z = \frac{10}{3} \Rightarrow S = \left\{ \left(2, 3, \frac{10}{3} \right) \right\}$.