الجبر الخطي والهندسة التحليلية

المستوى الثاني تقانة

المحاضرة السادسة

المعادلات الخطية

المعادلة الخطية: هي المعادلة ذات الشكل:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

حيث $x_1, x_2, \dots, x_n$ مجاهيل و $a_1, a_2, \dots, a_n, b$ ثوابت عددية.

تدعى مجموعة القيم $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ التي تجعل المعادلة السابقة صحيحة بعد التعويض عن $x_1, x_2, \dots, x_n$ بـ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ بحل المعادلة الخطية.

إذا كان $b = 0$ في المعادلة السابقة فإنها تسمى معادلة خطية متجانسة، وفيما عدا ذلك غير متجانسة.

تمثل المعادلة الخطية بمجهول واحد نقطة على محور الاعداد الحقيقية، وتمثل المعادلة الخطية بمجهولين مستقيم في المستوي، كما تمثل المعادلة الخطية بثلاثة مجاهيل مستوٍ في الفضاء.

جمل المعادلات الخطية: نسمي الجملة:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \qquad (1)$$

جملة m معادلة خطية لـ n مجهول، اختصاراً جملة معادلات خطية.

في الحالة العامة ليس بالضرورة أن يكون عدد المعادلات مساوٍ لعدد المجاهيل.

حل الجملة الخطية (1) هو مجموعة الأعداد $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ التي تجعل كل معادلة من معادلات الجملة (1) صحيحة بعد التعويض عن $x_1, x_2, \ldots, x_n$ بـ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

مثال 1: ان للمعادلتين $6x+3y=15$, $2x+3y=7$ ، حل وحيد هو: $x=2, y=1$.

مثال 2: ان المعادلتين $6x+9y=1$, $2x+3y=2$ ليس لهما حل، لأن أي عددين يحققان المعادلة الأولى لايمكن أن يحققا المعادلة الثانية.

مثال 3: بينما للمعادلتين $6x+3y=3$, $2x+y=1$ عدد غير منته من الحلول.

نلاحظ من خلال الأمثلة السابقة بأنه عند إيجاد الحل لجملة معادلات خطية يطرح أكثر من تساؤل. أولاً هل الجملة قابلة للحل أم لا وإذا كانت قابلة للحل هل هذا الحل وحيد أم يوجد عدد غير منته من الحلول سنجيب على هذه التساؤلات من خلال الدراسة التالية (وخصوصاً مبرهنة كابيلي).

– نكتب جملة المعادلات الخطية على شكل جداء مصفوفات إن جملة المعادلات (1) يمكن كتابتها على الشكل:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \quad (1) \quad \Leftrightarrow \quad AX = B \quad (2)$$

بحيث:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

وتدعى بمصفوفة المعاملات وهي مصفوفة من المرتبة (m,n).

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [x_1 \; x_2 \; \dots \; x_n]^T$$

وهي مصفوفة المجاهيل وهي من المرتبة $(n,1)$.

ويمثل الطرف الثاني في الجملة العمود الحر وهو من المرتبة $(m,1)$:

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = [b_1 \; b_2 \; \dots \; b_m]^T$$

لنشكل مصفوفة جديدة وهي:

$$\left[A \middle| B\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

وندعوها المصفوفة الموسعة (Augmented Matrix).

التصور الهندسي لجملة المعادلات الخطية: ان كل معادلة خطية بمجهولين تمثل مستقيم في المستوي، وبالتالي فإن جملة معادلتين خطيتين بمجهولين تمثل مستقيمين في المستوي، وهذا يعني ان هذه المستقيمين يمكن ان يتقاطعا بنقطة (اي للجملة حل وحيد) او ينطبقان (عدد غير منته من الحلول) ويمكن الا يتقاطعا – متوازيان (لا يوجد للجملة حل). ويمكن تعميم ذلك من اجل اكثر من معادلتين بمجهولين.

كما ان كل معادلة خطية بثلاثة مجاهيل تمثل مستو في الفضاء ثلاثي الابعاد، ، وبالتالي فإن جملة ثلاث معادلات خطية بثلاثة مجاهيل تمثل ثلاث مستويات في الفضاء ثلاثي الابعاد، وهذا يعني ان هذه المستويات ممكن ان تتقاطع بنقطة (اي للجملة حل وحيد)، او بمستقيم او بمستو (عدد غير منته من الحلول)، ويمكن الا تتقاطع متوازية أو اثنان متوازيان يقطعهما الثالث او كل اثنين متقاطعين بفصل مشترك مختلف عن الاخر (لا يوجد للجملة حل).